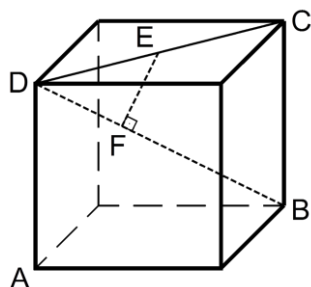


Matemática

01. A ilustração a seguir é de um cubo com aresta medindo 6 cm. A, B, C e D são os vértices indicados do cubo, E é o centro da face contendo C e D, e F é o pé da perpendicular a BD traçada a partir de E.



Com base nas informações acima, analise as proposições a seguir.

- 0-0) A distância entre A e B mede $6\sqrt{2}$ cm.
- 1-1) A distância entre B e D mede $6\sqrt{3}$ cm.
- 2-2) Os triângulos CDB e FDE são semelhantes.
- 3-3) O seno do ângulo FDE é $\sqrt{3}/3$.
- 4-4) A distância entre E e F mede $2\sqrt{6}$ cm.

Resposta: VVVVF

Justificativas:

- 0-0) Verdadeira. AB é a diagonal de um quadrado com lado medindo 6 cm, logo mede $6\sqrt{2}$ cm.
- 1-1) Verdadeira. BD é a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo $AB = 6\sqrt{2}$ cm e $AD = 6$ cm; portanto,

$$BD = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 6^2} = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$
- 2-2) Verdadeira. Os triângulos CDB e FDE são semelhantes, pois ambos são retângulos e admitem ângulos agudos de mesma medida.
- 3-3) Verdadeira. O seno do ângulo FDE é $\frac{BC}{BD} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- 4-4) Falsa. $EF = DE \cdot (\text{seno de FDE}) = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}$ cm.

02. Sobre o sistema de equações lineares apresentado abaixo, analise as proposições a seguir, sendo a um parâmetro real.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ay + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

- 0-0) Se $a = 2$, então o sistema admite infinitas soluções.
- 1-1) O sistema sempre admite solução.
- 2-2) Quando o sistema admite solução, temos que $x = 1$.
- 3-3) Se $a \neq 2$, então o sistema admite uma única solução.
- 4-4) Se $a = 1$, então o sistema admite a solução $(1, 2, -1)$.

Resposta: FFVVV

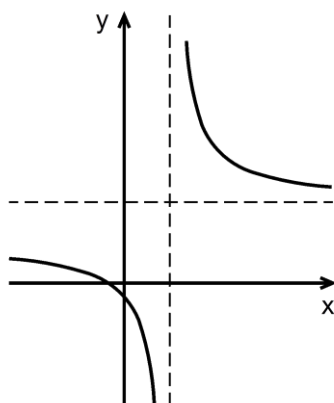
Justificativa:

Subtraindo a primeira equação da terceira obtemos $x = 1$. Substituindo $x = 1$ na primeira e na segunda equação obtém-se o sistema

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ ay + 2z = 0 \end{cases}$$

Eliminando z na primeira equação temos $z = 1 - y$, e substituindo na segunda equação, fica $ay + 2(1 - y) = 0$, que se simplifica como $(2 - a)y = 2$. Portanto: se $a = 2$ o sistema é impossível. Se $a \neq 2$, a solução do sistema satisfaz $y = \frac{2}{2-a}$ e $z = \frac{-a}{2-a}$. Se $a \neq 2$, o sistema admite uma única solução dada por $(1, \frac{2}{2-a}, \frac{-a}{2-a})$. Se $a = 1$ então a única solução do sistema é $(1, 2, -1)$.

03. Considere a função $f: \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{5x+3}{x-2}$, que tem parte do seu gráfico esboçada abaixo.



Analise as proposições a seguir, referentes a f .

0-0) A imagem de f é o conjunto dos reais diferentes de 1.

1-1) f admite inversa.

2-2) Se y é um número real diferente de 5, então $f\left(\frac{2y+3}{y-5}\right) = y$.

3-3) O gráfico de f intercepta o eixo das abscissas no ponto com coordenadas $(-3/5, 0)$.

4-4) Se x é real e $x > 2$, então $f(x) > 5$.

Resposta: FFVVV

Justificativa:

0-0) Falsa. Seja y um real na imagem de f . Existe x real e $y = \frac{5x+3}{x-2}$ e daí $x = \frac{2y+3}{y-5}$. O único valor não aceitável de y é $y = 5$. A imagem de f é o conjunto dos reais $\neq 5$.

1-1) Falsa. Como a imagem de f é diferente de seu contradomínio, f não admite inversa.

2-2) Verdadeira. Do cálculo na proposição 0-0 obtemos $f\left(\frac{2y+3}{y-5}\right) = y$.

3-3) Verdadeira. O gráfico de f intercepta o eixo das abscissas no ponto em que $y = 0$, ou seja, para x tal que $(5x+3)/(x-2) = 0$ ou $x = -3/5$.

4-4) Verdadeira. Temos $f(x) > 5$ se e somente se $f(x) - 5 = \frac{13}{x-2} > 0$, ou seja, se e somente se $x > 2$.

04. Para cada número real a , analise as proposições a seguir, referentes à representação geométrica da equação $x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$ em um sistema de coordenadas cartesianas xOy.

0-0) Se $a = 1$, a equação representa uma circunferência.

1-1) Se $a = 0$, a equação representa uma reta.

2-2) Se $a = 3$, a equação representa uma hipérbole.

3-3) Se $a = -2$, a equação representa uma elipse.

4-4) Se $a = -1$, a equação representa a união de duas retas.

Resposta: VFFFV

Justificativa:

Completando quadrados na equação dada obtemos $(x+1)^2 + a(y-1)^2 = 1+a$.

0-0) Verdadeira. Se $a = 1$, a equação se torna $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ e representa a circunferência com centro no ponto $(-1, 1)$ e raio $\sqrt{2}$.

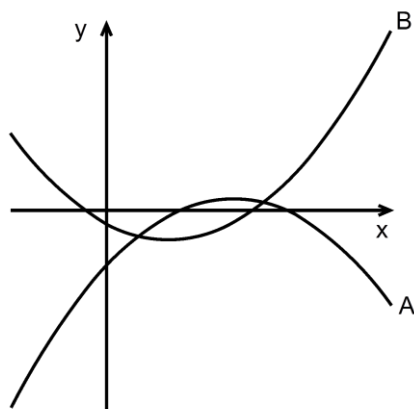
1-1) Falsa. Se $a = 0$, a equação se torna $(x+1)^2 = 1$ e representa as retas $x = 0$ e $x = -2$.

2-2) Falsa. Se $a = 3$, a equação se torna $(x+1)^2 + 3(y-1)^2 = 4$ e representa a elipse com equação $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{4/3} = 1$.

3-3) Falsa. Se $a = -2$, a equação se torna $(x+1)^2 - 2(y-1)^2 = -1$ e representa a hipérbole $\frac{(y-1)^2}{1/2} - (x+1)^2 = 1$.

4-4) Verdadeira. Se $a = -1$ a equação se torna $(x+1)^2 - (y-1)^2 = 0$ e representa a união das retas com equações $y = x + 2$ e $y = -x$.

05. A seguir, estão ilustradas partes dos gráficos das parábolas A e B, com equações respectivas $y = -x^2 + 8x - 13$ e $y = x^2 - 4x - 3$.



Analise as proposições abaixo, acerca dessa configuração.

- 0-0) Um dos pontos de interseção das parábolas A e B tem coordenadas $(1, -6)$.
 1-1) O vértice da parábola A é o ponto $(4, 2)$.
 2-2) A reta que passa pelos pontos de interseção das parábolas A e B tem equação $y = 2x - 6$.
 3-3) A distância entre os vértices das parábolas A e B é $\sqrt{102}$.
 4-4) A parábola B intercepta o eixo das ordenadas no ponto com coordenadas $(0, -3)$.

Resposta: VFFFV

Justificativa:

- 0-0) Verdadeira. As abscissas dos pontos de interseção das parábolas satisfazem a equação $-x^2 + 8x - 13 = x^2 - 4x - 3$, que é equivalente a $x^2 - 6x + 5 = 0$, que tem as soluções $x = 1$ e $x = 5$. Os pontos de interseção são $(1, -6)$ e $(5, 2)$.
 1-1) Falsa. A parábola A tem equação $y = -(x - 4)^2 + 3$ e seu vértice é o ponto $(4, 3)$.
 2-2) Falsa. A reta que passa pelos pontos de interseção das parábolas tem inclinação $\frac{2+6}{5-1} = 2$ e equação $y = 2x - 8$.
 3-3) Falsa. A parábola B tem equação $y = (x - 2)^2 - 7$ e seu vértice é o ponto $(2, -7)$. A distância entre os vértices é dada por $\sqrt{(4 - 2)^2 + (3 + 7)^2} = 2\sqrt{26}$.
 4-4) Verdadeira. A parábola B intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, -3)$.

06. Uma compra em uma loja da Internet custa 1250 libras esterlinas, incluindo os custos de envio. Para o pagamento no Brasil, o valor deve ser inicialmente convertido em dólares e, em seguida, o valor em dólares é convertido para reais. Além disso, paga-se 60% de imposto de importação à Receita Federal e 6,38% de IOF para pagamento no cartão de crédito. Se uma libra esterlina custa 1,6 dólares e um dólar custa 2 reais, calcule o valor a ser pago, em reais, e indique a soma de seus dígitos.

Resposta: 27

Solução:

O valor a ser pago será de $1250 \cdot 1,6 \cdot 2 \cdot 1,0638 = 6808,32$ reais.

07. A, B e C são sócios de uma pequena empresa. Quando os três trabalham o mesmo número de horas em um projeto, o pagamento recebido pelo projeto é dividido da seguinte maneira: A recebe 45% do total, B recebe 30% e C recebe os 25% restantes. Em determinado projeto, A trabalhou 15 horas, B trabalhou 20 horas e C trabalhou 25 horas. Se o pagamento foi de R\$ 1.900,00, quanto caberá a C, em reais? Indique a soma dos dígitos do valor recebido por C.

Resposta: 13

Solução:

O valor deve ser dividido em partes diretamente proporcionais a 0,45, 0,30 e 0,25 e a 15, 20 e 25. Caberá a C o valor de $\frac{1900 \cdot 0,25 \cdot 25}{0,45 \cdot 15 + 0,30 \cdot 20 + 0,25 \cdot 25} = 625$ reais.

- 08.** Um cilindro reto de ferro é derretido, e o ferro obtido, que tem o mesmo volume do cilindro, é moldado em esferas com raio igual à metade do raio da base do cilindro. Se a altura do cilindro é quatro vezes o diâmetro de sua base, quantas são as esferas obtidas?

Resposta: 48

Solução:

O volume do cilindro é $\pi r^2 \cdot 8r = 8\pi r^3$, com r sendo o raio da base do cilindro. O volume de cada esfera é $\frac{4\pi(\frac{r}{2})^3}{3} = \frac{\pi r^3}{6}$. O número de esferas obtido será $\frac{8\pi r^3}{\frac{\pi r^3}{6}} = 48$.

- 09.** Determine o polinômio com coeficientes reais $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, tal que

$$p(x+1) - p(x) = 6x^2$$

e indique $a^2 + b^2 + c^2$.

Resposta: 14

Solução:

Substituindo $p(x)$ obtemos $p(x+1) - p(x) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) - (ax^3 + bx^2 + cx) = 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c)$. Igualando a $6x^2$ obtemos $3a = 6, 3a+2b = 0$ e $a+b+c = 0$. Segue que $a = 2, b = -3$ e $c = 1$. Portanto, $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 14$.

- 10.** Uma expedição tinha alimento suficiente para 30 dias. Passados 10 dias do seu início, outras 18 pessoas se juntaram às primeiras e o alimento durou mais 16 dias. Quantas eram as pessoas no início da expedição?

Resposta: 72

Solução:

Seja n o número de pessoas no início da expedição. Cada pessoa consome por dia a fração $\frac{1}{30n}$ do alimento que existia no início da expedição. Passados 10 dias do início da expedição, foi consumido $\frac{10n}{30n} = \frac{1}{3}$ do alimento, e restam dois terços. Nos 16 dias restantes, foi consumida a fração $\frac{16(n+18)}{30n}$. Assim, $\frac{2}{3} = \frac{16(n+18)}{30n}$, que se simplifica como $5n = 4n + 72$ e $n = 72$.

- 11.** Um capital é aplicado a uma taxa anual de juros compostos e rende um montante de R\$ 15.200,00 em 3 anos, e um montante de R\$ 17.490,00 em 4 anos. Indique o valor inteiro mais próximo da taxa percentual e anual de juros.

Resposta: 15

Solução:

Temos que o capital R\$ 17.490 resultou em um montante de R\$ 15.200, depois de aplicado um ano. Se i é a taxa, temos $1+i = \frac{17490}{15200} \approx 1,15$ e segue que $i = 0,15 = 15\%$.

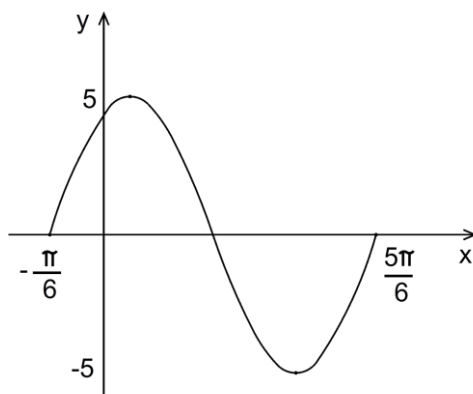
- 12.** Encontre o menor inteiro positivo n tal que a potência $(\sqrt{3} + i)^n$ seja um número real.

Resposta: 6

Solução:

Colocando o complexo $\sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica obtemos $\sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$. Daí $(\sqrt{3} + i)^n = 2^n(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6})$ que será real somente se $\sin \frac{n\pi}{6} = 0$. Portanto, $\frac{n\pi}{6} = k\pi$, com k inteiro, e $n = 6k$. O menor valor inteiro positivo de n é 6.

- 13.** Seja f uma função que tem como domínio o conjunto dos números reais e é dada por $f(x) = a \cdot \text{sen}(\omega \cdot x + b)$, com a , ω e b constantes reais. A figura abaixo ilustra o gráfico de f , restrito ao intervalo fechado $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. A função f tem período π e seu conjunto imagem é o intervalo fechado $[-5, 5]$.



Determine as constantes a e ω e o menor valor positivo de b . Indique $a^2 + \omega^2 + 3b/\pi$.

Resposta: 30

Solução:

Temos $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. Como a imagem do seno é o intervalo fechado $[-1, 1]$, temos $a = 5$. Como $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0$ temos $5\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3} + b\right) = 0$ e o menor valor positivo de b é $\pi/3$. Temos $5^2 + 2 + \frac{3\pi/3}{\pi} = 30$.

- 14.** Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$. Indique $|a| + |b| + |c| + |d|$.

Resposta: 19

Solução:

Temos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Segue que $3a + 11b = 1$, $a + 4b = 0$ e $3c + 11d = 0$, $c + 4d = 1$. Das duas primeiras equações obtemos $a = -4b$, $3(-4b) + 11b = 1$ e $b = -1$, $a = 4$. Das duas últimas equações, obtemos $d = -\frac{3c}{11}$, $c - \frac{12c}{11} = 1$ e $c = -11$, $d = 3$. Assim $|a| + |b| + |c| + |d| = 4 + 1 + 11 + 3 = 19$.

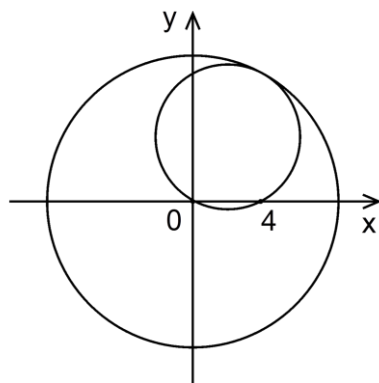
- 15.** Um jornal inclui em sua edição de domingo um CD de brinde. O CD pode ser de rock ou de música sertaneja, mas, como está em uma embalagem não identificada, o comprador do jornal não sabe qual o gênero musical do CD, antes de adquirir o jornal. 40% dos jornais circulam com o CD de rock e 60% com o CD de música sertaneja. A probabilidade de um leitor do jornal gostar de rock é de 45%, e de gostar de música sertaneja é de 80%. Se um comprador do jornal é escolhido ao acaso, qual a probabilidade percentual de ele gostar do CD encartado em seu jornal?

Resposta: 66

Solução:

A probabilidade de o CD encartado ser de rock e o leitor gostar de rock é de $0,4 \cdot 0,45 = 0,18$ e a probabilidade de o CD ser de sertanejo e o leitor gostar de sertanejo é de $0,6 \cdot 0,8 = 0,48$. A probabilidade de o leitor gostar do CD é de $0,18 + 0,48 = 0,66 = 66\%$.

16. Uma circunferência tem centro no primeiro quadrante, passa pelos pontos com coordenadas $(0, 0)$ e $(4, 0)$ e é tangente, internamente, à circunferência com equação $x^2 + y^2 = 64$. Abaixo, estão ilustradas as duas circunferências.



Indique o inteiro mais próximo da soma das coordenadas do ponto de interseção das duas circunferência

Resposta: 11

Solução:

Seja (a, b) o centro da circunferência e r o seu raio. Como a circunferência passa pela origem que é o centro de $x^2 + y^2 = 64$ temos $r = 4$. Como a circunferência passa por $(0, 0)$, temos $(0 - a)^2 + (0 - b)^2 = 16$, logo $a^2 + b^2 = 16$. Como a circunferência passa por $(4, 0)$, temos $(4 - a)^2 + (0 - b)^2 = 16$, logo $a^2 - 8a + 16 + b^2 = 16$ e segue que $a = 2$, $b^2 = 16 - 4$ e $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. A circunferência tem equação $(x - 2)^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 = 16$ ou $x^2 + y^2 - 4x - 4\sqrt{3}y = 0$. O ponto de interseção das duas circunferências satisfaz $64 - 4x - 4\sqrt{3}y = 0$ ou $x = 16 - \sqrt{3}y$. Daí, $(16 - \sqrt{3}y)^2 + y^2 = 64$ e, então, $4y^2 - 32\sqrt{3}y + 192 = 0$, que, simplificada, se torna $y^2 - 8\sqrt{3}y + 48 = 0$. Esta equação se escreve $(y - 4\sqrt{3})^2 = 0$ e $y = 4\sqrt{3}$, $x = 4$. Assim, $x + y = 4\sqrt{3} + 4 \approx 10,93$.